**Лекція**

**Тема:** Поняття про тіла і поверхні обертання. Циліндр.

**Мета:** формування понять циліндр, основи і твірні циліндра; радіус, висота та вісь циліндра; осьовий переріз циліндра; вивчення властивостей основ і твірних циліндра; формування вмінь знаходити елементи циліндра; дотична площина до циліндра, описана призма.

**План лекції:**

**1.Тіла обертання.**

**2. Циліндр.**

**3.Осьовий переріз циліндра.**

**4.Перерізи циліндра площинами.**

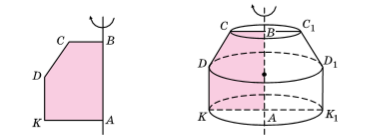
**5. Вписані та описані циліндри*.***

***6.*Площа бічної та площа повної поверхні циліндра.**

**7. Об’єм циліндра.**

**1.Тіла обертання.**

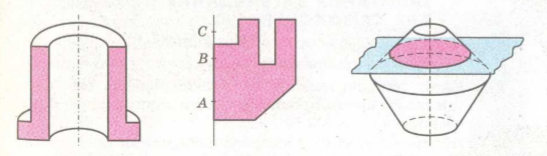
Нехай деякий плоский опуклий многокутник обертається навколо нерухомої прямої, що містить сторону (рис.1).



***Рис.1 Рис.2***

Тоді кожна точка, що належить многокутнику, крім точок, що належать стороні , описує коло, центр якого належить прямій При цьому весь многокутник описує *тіло обертання,* пряму називають *віссю* цього *тіла обертання*. Площина, яка проходить через *вісь тіла обертання* , є його *площиною симетрії.* Таких площин симетрії кожне тіло обертання має безліч.

Площина, що проходить через вісь тіла обертання перетинає його по деякій фігурі. Цю фігуру називають *осьовим перерізом*. Осьовим перерізом тіла обертання, зображеного на рисунку 2, є многокутник Зокрема, осьовий переріз тіла обертання може складатися з двох плоских фігур, симетричних відносно осі. (рис.3).

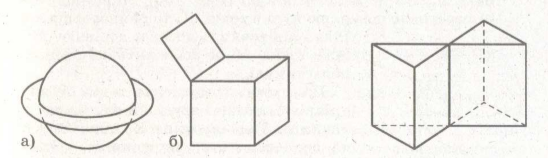


***Рис.3 Рис.4 Рис.5***

Перерізом тіла обертання площиною, перпендикулярною до осі, є круг, або плоске кільце, або кілька кілець тощо. Для прикладу уявимо тіло, утворене обертанням фігури, зображеної на рисунку 4, навколо прямої Якщо його перетинати площинами, які перпендикулярні до осі та проходять черех точки , то в перерізі матимемо відповідно круг, круг і кільце, два кільця. Якщо тіло обертання опукле, то січна площина, перепендикулярна до осі обертання, перетинає його по кругу. (рис.5).

Щоб задати *тіло обертання*, достатньо назвати його *вісь і фігуру*, обертанням якої утворене дане тіло. Наприклад, говорять : «тіло, утворене обертанням трикутника навколо його сторони.»

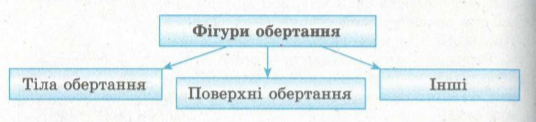
Слід розрізняти поняття «фігура обертання » і «тіло обертання». Не кожна фігура є тілом. Наприклад, круг, кільце, сфера – фігури обертання, але не тіла.



***Рис.6 Рис.7***

Обєднання кулі, та плоского кільця (рис.6 а) ), куба і відрізка, або якої-небудь плоскої фігури (рис.6 б) ) – не тіло, бо багато точок цих фігур не належать ні просторовій області, ні її межі. Не є тілом і фігура, яка містить кілька просторових областей (рис.7).

Співвідношення між різними видами фігур обертання подано на рисунку 8.



***Рис.8***

Приклади матеріальних моделей тіл обертання: хокейна шайба, лінза, снаряд, патрон, труба, котушка, звичайна пляшка, колба, пробірка, спортивний диск, обруч тощо. Але, наприклад, свердло, шпилька з нарізкою – не тіла обертання.

Кожна фігура обертання – це деяка множина кіл. Проекцією кола на площину, не перпендикулярну до площини кола, є еліпс (рис.9). Тому наочне зображення тіла обертання містить еліпси.



***Рис.9***

* **Тілом обертання називають геометричне тіло, утворене обертанням деякої плоскої фігури навколо фіксованої прямої , яку називають віссю обертання.**

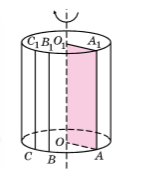


***Рис.10***

Прикладами тіл обертання, що трапляються в побуті (рис.10) є бочка, діжка, дзига.

**2. Циліндр.**

* **Циліндром називають геометричне тіло, утворене обертанням прямокутника навколо осі, яка містить одну з його сторін (рис.11).**



***Рис.11***

На рисунку 11 прямокутник обертається навколо прямої, що містить сторону цього прямокутника, пряма є віссю циліндра, утвореного в результаті цього обертання. Сторони прямокутника описують рівні між собою круги, що належать паралельним площинам. Ці круги називають *основами циліндра*, їх радіус – *радіусом циліндра*, діаметр – *діаметром циліндра*.

На рисунку 11: – радіуси циліндра.

Поверхню, утворену обертанням сторони паралельно осі циліндра**,** називають *бічною поверхнею циліндра*. Кожний відрізок цієї поверхні (а також його довжину), що паралельний і дорівнює відрізку **,** називають *твірною циліндра.* На рисунку 11: - твірні циліндра. Відстань між площинами основ, яка дорівнює довжині твірної циліндра, називають *висотою циліндра.*

**Задача 1.**

Прямокутник, діагональ якого дорівнює 13 см, а одна зі сторін на 7 см менше за іншу, обертається навколо більшої сторони. Знайти радіус і висоту отриманого циліндра.

**Розв’язання:** 1)Нехай прямокутник обертається навколо осі , (рис.11).

2)Нехай , тоді За умовою Маємо:

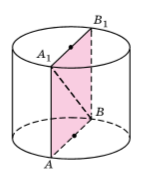
- не підходить.

3)Отже, радіус циліндра а висота  **(см)**

**Відповідь**: ***R*** (радіус) – 5 см; ***h*** (висота) – 12 см.

**3.Осьовий переріз циліндра.**

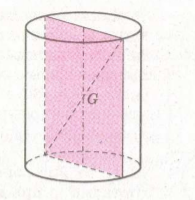
Переріз циліндра площиною, яка проходить через його вісь, називають *осьовим перерізом циліндра* (рис.12).



***Рис.12***

Осьовий переріз циліндра – прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює діаметру циліндра, а інша – його висоті. На рисунку 12 прямокутник **-** осьовий переріз циліндра, –діаметр циліндра,  **–** твірна, що дорівнює висоті циліндра. Якщо осьовим перерізом циліндра є квадрат, то його іноді називають рівностороннім.

Усі осьові перерізи циліндра – рівні прямокутники (рис. 13).



***Рис.13***

Їхні діагоналі проходять через середину відрізка, який сполучає центри основ циліндра і ділиться цією точкою навпіл. Тому точка – центр симетрії циліндра. Площина, яка проходить через точку  **–** перпендикулярно до осі циліндра,- площина його симетрії. Інші площини симетрії циліндра проходять через його вісь.

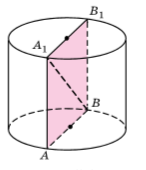
**Задача 2.**

Довжина кола основи циліндра дорівнює 15 см, а діагональ осьового перерізу – 17 см. Знайти твірну циліндра.

**Розв’язання:**

1. Нехай – діагональ осьового перерізу циліндра (рис.14),
2. Позначимо радіус циліндра – ***r.*** Тоді за умовою

звідки , тому



***Рис.14***

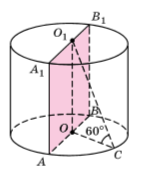
1. У

**Відповідь**: 8 см.

**Задача 3.**

Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює 12 см і утворює з площиною нижньої основи кут Знайти площу осьового перерізу циліндра.

**Розв’язання:**



***Рис.15***

1. Нехай – відрізок, що сполучає центр верхньої основи – точку – з точкою кола нижньої основи (рис. 15), (за умовою).

- проекція на площину нижньої основи, тому – кут, що утворює відрізок з площиною нижньої основи. За умовою

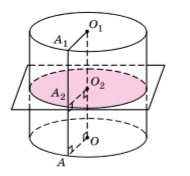
1. У
2. – осьовий переріз ,

1. Тоді площа діагонального перерізу:

**Відповідь**:

**4.Перерізи циліндра площинами.**

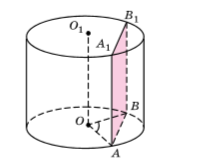
* Перерізом циліндра площиною, яка паралельна площині основи, є круг, що дорівнює кругу основи циліндра (рис.16).



***Рис.16***

Дійсно, кожна точка твірної знаходиться від осі на відстані , що дорівнює радіусу , оскільки – прямокутник.

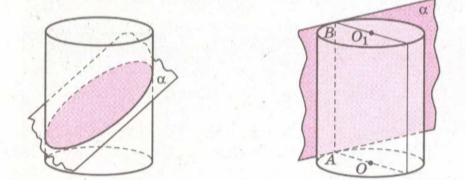
* Перерізом циліндра площиною , паралельною осі циліндра, є прямокутник. На рисунку 17 прямокутник – переріз циліндра площиною, паралельною осі циліндра



***Рис.17***

Дві його сторони: і – твірні циліндра, а дві інші – паралельні та рівні хорди основ.

* Площина, яка перетинає всі твірні циліндра, але не перпендикулярна до них, перетинає бічну поверхню циліндра по еліпсу (рис.18).



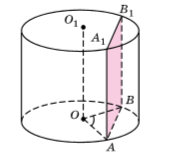
***Рис.18 Рис.19***

* Площина, яка проходить через твірну циліндра і не має з ним інших спільних точок, називається *дотичною площиною* до циліндра. Вона перпендикулярна до осьового перерізу циліндра, проведеного через ту саму твірну (рис. 19).

**Задача 4.**

Паралельно осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу . Радіус основи циліндра дорівнює 4 см, а висота – 3 см. Знайдіть периметр отриманого перерізу.

**Розв’язання:**



***Рис.20***

1)Нехай – переріз, що задано в умові (рис. 20),

.

2)Оскільки - рівнобедрений.

Тому – рівносторонній,

3)Отже, периметр перерізу (см).

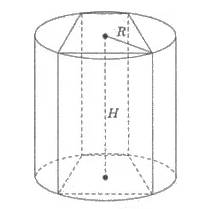
**Відповідь**: 14 см.

**5. Вписані та описані циліндри*.***

Кругові циліндри і призми в технічних і будівельних конструкціях часто-густо пов’язані між собою. Однією з геометричних конструкцій, у якій фігурують призма і циліндр, є вписана в круговий циліндр призма і описана навколо нього призма.

1. **Призма, вписана у циліндр.**

* **Призму називають вписаною у циліндр, якщо її основи вписані в основи циліндра, а бічні ребра є твірними циліндра (рис.21).**



***Рис.21***

При цьому *циліндр* називають *описаним навколо призми*. Зрозуміло, що оскільки твірні циліндра перпендикулярні до площини основи, то призма, вписана у циліндр, є прямою.

З означення *призми, вписаної у циліндр*, випливають її властивості:

1) Циліндр можна описати навколо прямої призми, якщо її основою є многокутник, навколо якого можна описати коло. При цьому радіус циліндра ***R***дорівнює радіусу цього кола.

2) Висота ***Н*** призми, яка сполучає центри кіл, описаних навколо основ, належить осі циліндра.

**Задача 5.**

Чи можна описати циліндр навколо прямої призми, в основі якої лежить:

1. трикутник, 2) ромб, який не є квадратом?

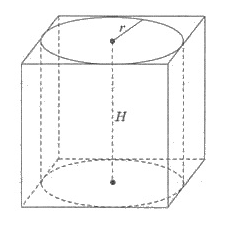
**Розв’язання:**

1) Так, оскільки навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

2) Ні, оскільки навколо ромба, який не є квадратом, не можна описати коло.

**2. Призма, описана навколо циліндра.**

* **Призму називають описаною навколо циліндра, якщо її основи описані навколо основ циліндра, а бічні грані належать площинам, дотичним до циліндра (рис. 22).**



***Рис.22***

При цьому *циліндр* називають *вписаним у призму*, оскільки твірні циліндра перпендикулярні до площини основ, то бічні грані призми, які містять твірні, також перпендикулярні до площин основ, тобто призма, описана навколо циліндра, є прямою.

З означення призми, описаної навколо циліндра, маємо її властивості:

1) Циліндр можна вписати в пряму призму, якщо її основою є многокутник, в який можна вписати коло. При цьому радіус циліндра ***r*** дорівнює радіусу цього кола.

2) Висота ***Н*** призми, яка сполучає центри кіл, вписаних в основи, належить осі циліндра.

**Задача 6.**

Навколо циліндра, висота якого дорівнює 5 см, описано чотирикутну призму, три сторони основи якої в порядку слідування дорівнюють 3 см, 4 см і 7 см. Знайти площу бічної поверхні призми.

**Розв’язання:**

1. Позначимо невідому сторону чотирикутника основи ***х.***

Оскільки цей чотирикутник описано навколо кола (рис. 22), то ***3 + 7 = 4 + х,*** звідси ***х = 6 см***.

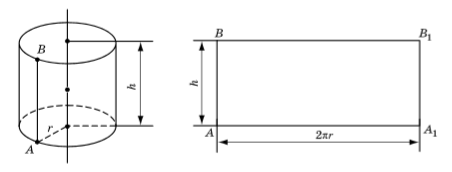
2) Площа бічної поверхні призми ***Sбіч = Р ∙ l,*** де Р - периметр основи, l - бічне ребро, яке дорівнює висоті циліндра. Маємо: Р = 3 + 7 + 4 + 6 = 20 (см).

3) ***Sбіч = 20 ∙ 5 = 100 (см2).***

**Відповідь: *100 (см2).***

**6.Площа бічної та площа повної поверхні циліндра.**

Якщо поверхню циліндра розрізати по твірній та по колах основ і розгорнути так, що всі твірні циліндра будуть належати деякій площині, то отримаємо *розгортку бічної поверхні циліндра*. За площу бічної поверхні циліндра приймають площу її розгортки. Розгорткою бічної поверхні є прямокутник , одна сторона якого дорівнює висоті циліндра  **,** а інша – довжині кола основи, тобто (рис. 23).



***Рис.23***

Таким чином, площа розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює

* **Площа бічної поверхні циліндра , радіус основи якого дорівнює , а висота – , обчислюється за формулою**

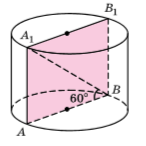
Для того щоб знайти площу повної поверхні циліндра , потрібно до площі його бічної поверхні додати площі двох його основ. Оскільки основою є круг, то його площа дорівнює **.**

**Задача 7.**

Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут Знайти площу бічної поверхні циліндра.

**Розв’язання:**

На рисунку 24 зображено осьовий переріз циліндра – прямокутник , діагональ якого .



***Рис.24***

2)У **:**

3)Отже, висота циліндра см, а радіус основи .

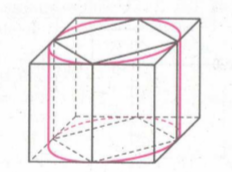
4)Таким чином, площа бічної поверхні циліндра:

**Відповідь:**

**7. Об’єм циліндра.**

**Теорема:** Об’єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту.

**Доведення:**



***Рис.25***

Нехай дано циліндр з площею основи і висотою Впишемо в нього правильну ***n***-кутну призму й опишемо навколо нього правильну ***n***-кутну призму (рис.25).

Якщо площі основ цих призм , то їхні об’єми дорівнюють **.** Оскільки вписана призма міститься у циліндрі, а циліндр – в описаній призмі, то об’єм даного циліндрабільший, ніж **,** але менший , ніж  **:**

**.**

При досить великому ***n*** значення як завгодно мало відрізняються від

Отже, ліва і права частини цієї подвійної нерівності , а також значення **,** що міститься між ними , як завгодно мало відрізняються від **.** Це може бути тільки тоді, коли **.** Теорему доведено.

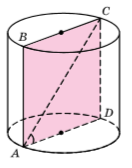
**Н а с л і д о к:**

Якщо радіус циліндра дорівнює , а висота -  , то обєм циліндра **.**

**Задача 8.**

Осьовий переріз циліндра – прямокутник, діагональ якого дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут Знайти об’єм циліндра.

**Розв’язання:**



***Рис.26***

1. На рисунку 26 зображено заданий в умові циліндр. Прямокутник – його осьовий переріз, см,
2. У :

(см);

**–**висота циліндра.

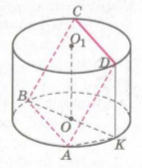
1. **У : .** Тоді радіус циліндра
2. Маємо:

**Відповідь:**

**Задача 9.**

У циліндр, радіус основи якого дорівнює 7 см, під кутом до осі вписано квадрат так, що всі вершини квадрата лежать на колах основ. Знайдіть об’єм циліндра, якщо сторона квадрата дорівнює 10 см.

**Розв’язання:**



***Рис.27***

1. Нехай –квадрат вписаний у циліндр, (рис.27).

Проведемо перпендикулярно до площини основи. Оскільки , то за теоремою про три перпендикуляри , тобто Отже, діаметр основи циліндра,

2) З за теоремою Піфагора знайдемо

,

3) висота циліндра.

, отже

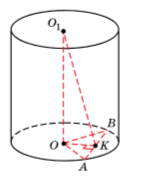
4)Оскільки

**Відповідь:**

**Задача 10.**

У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою заданої хорди, дорівнює 10 см і утворює з площиною нижньої основи кут Знайти об’єм циліндра.

**Розв’язання:**



***Рис.28***

1)На рисунк 28 зображено заданий в умові циліндр, середина ,

2)У

*-* висота циліндра.

3) У :

4)Оскільки – середина і рівнобедрений ), то – медіана, висота і бісектриса :

5)У

Отже,

6)Об’єм циліндра:

**Відповідь:**

**Домашнє завдання:**

**1.**Накресліть фігуру, утворену при обертанні кривої  **,** навколо а) осі ; б) осі в) прямої г) прямої

**2**. Радіус основи циліндра дорівнює 8 см, а діагональ осьового перерізу більша за твірну на 2 см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

**3.** Знайти площу повної поверхні циліндра радіуса 3 см, висота якого дорівнює 5 см.

**4.** Знайти площу бічної поверхніциліндра, утвореного обертаннямквадрата з діагоналлю 5 навколо сторони.

**5**. Знайти об’єм циліндра, якщо його висота дорівнює 4 см, а відрізок , який сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, дорівнює 6 см.

**6**. Об’єм циліндра дорівнює 8с а його висота - 2см. Знайти діагональ осьовог перерізу.

Питання для самоконтролю:

1.Як можна утворити тіло обертання?

2.Що таке вісь обертання, осьовий переріз тіла обертання?

3.Якою фігурою може бути осьовий переріз тіла обертання? А переріз площиною, перпендикулярною до осі обертання?

4.Яке тіло називають циліндром?

5.Що називають віссю циліндра, основами циліндра, радіусом циліндра, діаметром циліндра?

6.Що називають висотою циліндра?

7.Що називають осьовим перерізом циліндра?

8.Що є перерізом циліндра площиною, яка паралельна площині основи?

9. Що є перерізом циліндра площиною, паралельною до осі циліндра?

10.За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні циліндра, а за якою – площу повної поверхні циліндра?

11. Сформулюйте теорему про об’єм циліндра.

12.Сформулюйте наслідок з цієї теореми.